

الهندسة الفضائية: طرائق وأمثلة وتمارين محلولة

(1) كيف تثبت الإرتباط الخطي لشعاعين ؟

طريقة : التحقق أن مركبات الشعاعين متناسبة أو كتابة أحد الأشعة بدلالة الآخر

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} \text{ أو } \vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

مثال : الشعاعان $\vec{u} \left(1, 2, -\frac{1}{2} \right)$ و $\vec{v} \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right)$ مرتبطين خطيا لأن $\vec{v} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{u}$

تطبيقات : إثبات استقامية ثلاث نقط أو توازي مستقيمين

(2) كيف تثبت أن ثلاثة أشعة من نفس المستوى ؟

طريقة (1) : - كتابة أحد الأشعة بدلالة الشعاعين الآخرين

طريقة (2) - نبين وجود $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ بحيث $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} = \vec{0}$

مثال : الأشعة $\vec{u} (1, 2, 3)$ و $\vec{v} (-2, 5, 4)$ و $\vec{w} (-4, 19, 18)$ هي من نفس المستوى لأن

$$2\vec{u} + 3\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$$

تطبيق : اثبات أن 4 نقط D, C, B, A هي من نفس المستوى

(3) كيف تثبت أن ثلاثة أشعة ليست من نفس المستوى ؟ (أي تشكل أساسا في الفضاء)

طريقة : نبين أن $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ تقبل حلا وحيدا $(0, 0, 0)$

مثال : $\vec{u} (1, 2, 3)$ و $\vec{v} (-2, 5, 4)$ و $\vec{w} (1, 1, 3)$ ليست من نفس المستوى لأن الجملة

$$\begin{cases} a - 2b + 1c = 0 \\ 2a + 5b + 1c = 0 \\ 3a + 4b + 3c = 0 \end{cases} \text{ تقبل حلا وحيدا } (0, 0, 0)$$

الأشعة $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ تشكل أساسا للفضاء

تطبيق : برهان أن 4 نقط ليست من نفس المستوى

(4) كيف تعين شعاعا \vec{u} عموديا على شعاعين \vec{v} و \vec{w}

طريقة : إذا كان $\vec{u} (a, b, c)$ نبحت عن حل (a, b, c) يختلف عن $(0, 0, 0)$ للجملة

مثال : $\vec{v} (-2, 1, 7)$ و $\vec{w} (1, 2, 3)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ و $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ معناه

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ -2a + b + 7c = 0 \end{cases} \text{ نأخذ مثلا } c = 1 \text{ ونحل الجملة}$$

فنجد $a = \frac{11}{5}$ و $b = \frac{-13}{5}$ وهكذا يمكن أخذ $\vec{u} \left(\frac{11}{5}, \frac{-13}{5}, 1 \right)$ أو $\vec{u} (11, -13, 5)$

(5) كيف تعين التمثيل الوسيط لمستقيم معرف بنقطة وشعاع

طريقة : (D) مستقيم يشمل نقطة A و شعاع توجيه له، نفسر تحليليا : $M \in D$ معناه $\vec{AM} = t \cdot \vec{u}$

المستقيم الذي يشمل $A(x_A, y_A, z_A)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a, b, c)$ له التمثيل الوسيط

$$\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + t \\ z = -4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

مثال (1) : D مستقيم يشمل $A(1, 2, -4)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(6, 1, -1)$ معناه $\vec{AM} = t \cdot \vec{u}$

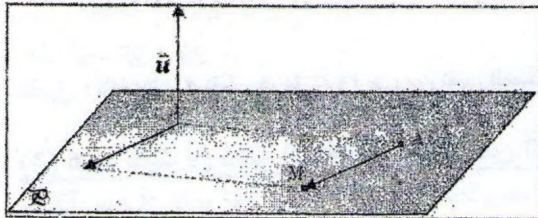
مثال (2) تعيين التمثيل الوسيط للمستقيم (AB) حيث $A(1, 2, -1)$ و $B(2, 0, 3)$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 4t - 1 \end{cases} \quad \text{إذن التمثيل الوسيط للمستقيم هو } \overline{AM} = t \overline{AB} \text{ ومنه } (AB) \text{ هو شعاع توجيه للمستقيم } \overline{AB}(1, -2, 4)$$

مثال (3) ليكن المستقيم (D) المعروف بالجملة $\begin{cases} x + y - 2z = -5 \\ 2x + y - z = -4 \end{cases}$ (1) عین نقطة وشعاع توجيه لهذا المستقيم ثم تمثيلا وسيطيا له
جواب : من هذه الجملة وبطرح (1) من (2) نجد : $x = 1 - z$ وبتعويضها في (1) نحصل : $y = -6 + 3z$
حل هذه الجملة إذن هي $(1 - z, -6 + 3z, z)$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -6 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ هو التمثيل الوسيط له } \vec{u}(-1, 3, 1) \text{ و شعاع توجيه له } A(1, -6, 0) \text{ إذن يمر من النقطة } (D) \text{ المستقيم}$$

(6) كيف تعين المعادلة الديكارتية لمستوى يمر من نقطة A و شعاع ناظمي له \vec{u} ؟



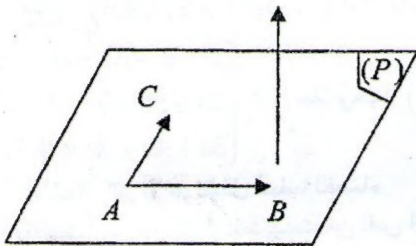
طريقة : نفرض تحليليا أن $M \in P$ معناه $\overline{AM} \cdot \vec{u} = 0$

مثال : $P = (A(1, 2, -4), \vec{u}(1, -3, 2))$

$$\overline{AM} \cdot \vec{u} = 0 \text{ معناه } (x - 1) - 3(y - 2) + 2(z + 4) = 0$$

ومنه معادلة P هي $x - 3y + 2z + 13 = 0$

تطبيق : تعيين المستوي الذي يمر من الكرة في نقطة



(7) كيف تعين معادلة ديكارتية لمستوى معين بثلاث نقط A و B و C

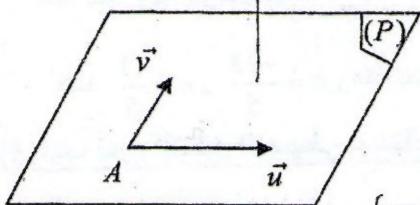
طريقة : (أ) نبين أن النقط ليست على استقامة واحدة (ب) نعين مركبات شعاع ناظمي \vec{n}

بحيث $\vec{n} \cdot \overline{AB} = 0$ و $\vec{n} \cdot \overline{AC} = 0$ (ج) ثم نتبع الطريقة (6) السابقة

مثال : بين أن النقط $A(1, 0, 3)$ و $B(1, 3, 2)$ و $C(0, 2, 4)$ تمثل مستويا

الحل : $\overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ الشعاعان غير مرتبطين خطيا (النقط ليست على استقامة واحدة) ومنه النقط تشكل مستويا

نعين شعاعا ناظميا $\vec{n}(a, b, c)$ للمستوي (ABC) : $\vec{n} \cdot \overline{AB} = 0$ و $\vec{n} \cdot \overline{AC} = 0$ أي $\begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ 3b - c = 0 \end{cases}$ إذن $\vec{n}(5, 1, 3)$ ومعادلة (ABC) هي من الشكل $5x + y + 3z + d = 0$ وبتعويض إحداثيات إحدى النقط فيها نجد $(ABC): 5x + y + 3z - 14 = 0$



(8) كيف تعين معادلة مستوى يمر من نقطة و علم أساس له ؟

طريقة : نعين شعاعا ناظميا للمستوي ثم نطبق الطريقة السابقة

مثال : (P) المستوي الذي يشمل النقطة $A(1, -2, 3)$ و (\vec{u}, \vec{v}) اساس له

حيث $\vec{u}(-1, 1, 4)$ و $\vec{v}(0, -3, 1)$

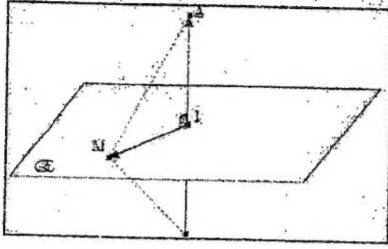
و $\vec{n}(a, b, c)$ شعاع ناظمي لـ (P) ومنه $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ و $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ ومنه $\begin{cases} -a + b + 4c = 0 \\ 0a - 3b + c = 0 \end{cases}$ وبحل الجملة نجد $\vec{n}(13, 1, 3)$

ومنه معادلة (P) من الشكل $13x + y + 3z + d = 0$ وبما أن $A \in (P)$ نجد $d = -20$ إذن معادلة (P) $13x + y + 3z - 20 = 0$

(9) كيف تعين معادلة المستوى المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$ ؟

طريقة : تعيين I منتصف القطعة $[AB]$ ثم تعيين معادلة المستوى الذي يشمل I و \overline{AB} شعاع ناظمي له

مثال : لتكن النقطتين $A(2, -1, 2)$ و $B(0, 3, 6)$ ، لدينا $I(1, 1, 4)$ و $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$



B

$$\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-4 \end{pmatrix} \text{ و } \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ معناه } M(x, y, z) \in (P)$$

ومنه معادلة (P) هي $x - 2y - 2z + 9 = 0$

(10) كيف تعين المسقط العمودي لنقطة على مستقيم والمسافة بين نقطة ومستقيم؟

طريقة : (1) لتعيين المسقط العمودي H للنقطة A على المستقيم (D) نكتب إحداثيات النقطة H بدلالة t بواسطة

التمثيل الوسيطى ثم إيجاد t بـ $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ وأخيرا نجد إحداثيات H

مثال : مستقيم تمثيله الوسيطى $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ و A نقطة من الفضاء مسقطها العمودي على (D) هو H

إحداثيات H تحقق الجملة $\begin{cases} x_H = 1 - 3t \\ y_H = 2 + t \\ z_H = -1 - t \end{cases}$ ، ومنه $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 3-3t \\ 1+t \\ -6-t \end{pmatrix}$ وشعاع توجيه (D) هو $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ وهذا يعني :

$t = \frac{2}{11}$ ومنه $-3(3-3t) + (1+t) - (-6-t) = 0$ وبتعويض هذه القيمة في التمثيل الوسيطى نجد $H\left(\frac{5}{11}, \frac{24}{11}, \frac{-13}{11}\right)$

(2) ولحساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) نحسب المسافة AH حيث H هو المسقط العمودي للنقطة A

المثال السابق : $AH = \sqrt{\frac{502}{11}}$

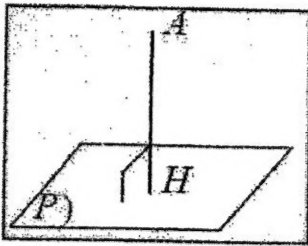
(11) كيف تعين المسقط العمودي لنقطة على مستوى والمسافة بين نقطة ومستوى؟

طريقة : (1) لتعيين المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) نعين أولا \vec{u} الشعاع الناطقي لهذا المستوى ثم نعين نقطة تقاطع المستقيم (D) الذي

يشمل A و \vec{u} شعاع توجيه له مع المستوى (P)

مثال : تعيين المسقط العمودي H للنقطة $A(1, 2, -3)$ على المستوى (P) ذو المعادلة $2x - y + 5z - 8 = 0$

حل : الشعاع الناطقي لـ (P) هو $\vec{u}(2, -1, 5)$ ، المستقيم (D) ذي شعاع التوجيه \vec{u} والذي يشمل A عمودي على (P) ويقطعه في النقطة H



التمثيل الوسيطى لـ (D) هو $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$ وإحداثيات H تحقق الجملة

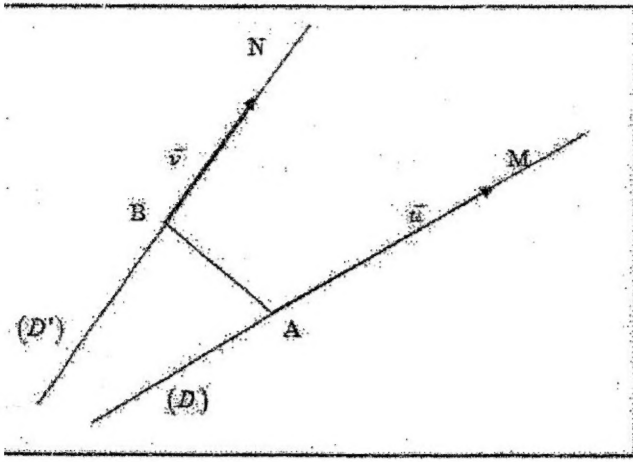
ومنه : $t = \frac{23}{30}$ وبالتالي $H\left(\frac{38}{15}, \frac{37}{30}, \frac{5}{6}\right)$ و $\begin{cases} x_H = 1 + 2t \\ y_H = 2 - t \\ z_H = -3 + 5t \end{cases}$ و $2x_H - y_H + 5z_H - 8 = 0$

(2) المسافة بين النقطة A والمستوى (P) هي المسافة بين النقطتين A و H حيث H هو المسقط العمودي لـ A على المستوى (P)

مثال : من المثال السابق نجد : $AH = \sqrt{\frac{529}{30}}$

ملاحظة : يمكن حساب المسافة بين النقطة A والمستوى (P) مباشرة باستعمال العلاقة $AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

(12) كيف نعين المستقيم العمودي على مستقيمين؟ والمسافة الأصغر بين مستقيمين؟



طريقة: (D) المستقيم ذي شعاع التوجيه \vec{u} ويشمل A و (D') مستقيم يشمل B و \vec{v} شعاع توجيهه.

نفكك الشعاع $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ وبما أن $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$ و

$\overrightarrow{BN} = \beta \vec{v}$ نكتب مركبات الشعاع \overrightarrow{MN} بدلالة α و β .

$\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0$ يجب أن يكون عموديا على كل من \vec{u} و \vec{v} . ومن العلاقتين $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{v} = 0$ يتم تعيين α و β ثم النقطتين M و N ومنه MN

مثال: (D) مستقيم معرف بـ: $A(1,1,0)$ و $\vec{u}(2,0,1)$ و (D') مستقيم

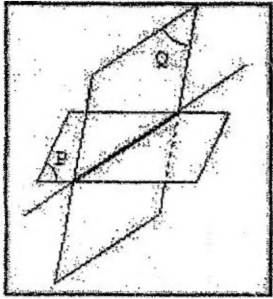
معرف بـ: $B(0,1,-3)$ و $\vec{v}(-1,3,1)$

لتكن M نقطة من (D) و N نقطة من (D') ، نفكك الشعاع

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ ، ولما أنه يوجد α و β بحيث $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$ و $\overrightarrow{BN} = \beta \vec{v}$ يكون لدينا $\overrightarrow{MN} = -\alpha \vec{u} + \overrightarrow{AB} + \beta \vec{v}$ ومنه مركبات \overrightarrow{MN} هي $(-2\alpha - 1 - \beta, 3\beta, -\alpha - 3 + \beta)$

$$\text{نحل الجملة} \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \text{ فنجد: } \begin{cases} -4\alpha - 2 - 2\beta - \alpha - 3 + \beta = 0 \\ 2\alpha + 1 + \beta + 9\beta - \alpha - 3 + \beta = 0 \end{cases} \text{ إذن } \alpha = \frac{-19}{18} \text{ و } \beta = \frac{5}{18}$$

ومنه $M\left(\frac{-10}{9}, 1, \frac{-19}{18}\right)$ و $N\left(\frac{-5}{18}, \frac{11}{6}, \frac{-49}{18}\right)$ وبالتالي المسافة الأصغر بين المستقيمين هي: $MN = \frac{5}{\sqrt{6}}$



(13) كيف نعين تقاطع مستويين؟

طريقة: إذا كان المستويان متقاطعين نعين تمثيلا وسيطيا لمستقيم التقاطع (D) بحل جملة المعادلتين

للمستويين (P) و (P') وبوضع أحد المجاهيل كوسيط

مثال: (P): $2x - y + 3z - 4 = 0$ و (P'): $3x - 2y + 11z - 1 = 0$ كل نقطة مشتركة تحقق:

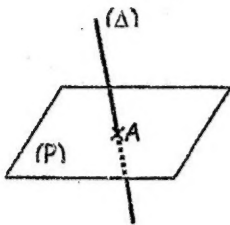
$$\begin{cases} x = 5z + 7 \\ y = 13z + 10 \end{cases} \text{ وبوضع } z = t \text{ نجد } \begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0 \\ 3x - 2y + 11z - 1 = 0 \end{cases} \text{ ونكافئ } \begin{cases} 2x - y = 4 - 3z \\ 3x - 2y = 1 - 11z \end{cases}$$

$$\text{وهو التمثيل الوسيطى للمستقيم (D) الذي يشمل } A(7,10,0) \text{ و } \vec{u}(5,13,1) \text{ شعاع توجيه له} \begin{cases} x = 5t + 7 \\ y = 13t + 10 \\ z = t \end{cases}$$

(14) كيف نعين تقاطع مستويين ومستقيم؟

طريقة: معادلة المستوي (P) والتمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) يشكلان جملة 4 معادلات بأربعة مجاهيل، فنحسب

x, y, z في معادلة (P) نحصل على t ، إذا كانت الجملة تقبل حلا وحيدا فإن (Δ) يقطع (P) في نقطة واحدة A



$$\text{مثال (1): } (\Delta) \text{ تمثيله الوسيطى } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ و (P) معادلته } 3x - 2y + 11z - 1 = 0$$

$$\text{نحل الجملة} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ وبالتالى } (\Delta) \text{ يقطع (P) في النقطة } A\left(\frac{7}{8}, -\frac{5}{4}, -\frac{3}{8}\right)$$

ملاحظة: إن تقاطع مستوي ومستقيم إما خال إذا كان المستقيم والمستوي متوازيان أو مستقيما إذا كان المستقيم محتوي في المستوي أو نقطة إذا كان المستقيم يقطع المستوي

مثال (2): (D) تمثيله الوسيط $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ و (P) معادلته $5x + y - z + 3 = 0$. بالتعويض في معادلة المستوي نجد $0t = -1$

لا يوجد حل. و $(1, -6, -1)$ شعاع توجيه (D) و $(5, 1, -1)$ شعاع ناظمي لـ (P) ونلاحظ $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ ومنه المستقيم يوازي المستوي وبالتالي تقاطعهما خال

مثال (3): (D) تمثيله الوسيط $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 \end{cases}$ و (P) معادلته $x + y + z = 0$ بالتعويض في معادلة (P) نجد: $0t = 0$.

كل قيم t هي حلول لهذه المعادلة و بالتالي كل نقط المستقيم (D) تنتمي الى المستوي (P) . إذن المستقيم (D) محتوي في (P)

(15) كيف تعين تقاطع مستقيمين؟

طريقة: نعرف المستقيمين بتمثيليهما الوسيطيين. إذا كانت الجملة من 3 معادلات لمجهولين تقبل حلا وحيدا فإن المستقيمين يتقاطعان في نقطة.

مثال (1): (D) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$ و (D') : $\begin{cases} x = -4 + 3t' \\ y = 3 - 8t' \\ z = -13 + 7t' \end{cases}$ بحل الجملة نجد $t = -2$ و $t' = 1$

بتعويض $t = -2$ في جملة (D) نجد $(x, y, z) = (-1, -5, -6)$ ونعوض $t' = 1$ في جملة (D') نجد $(x, y, z) = (-1, -5, -6)$ إذن (D) و (D') يتقاطعان في نقطة $A(-1, -5, -6)$

مثال (2): d_1 : $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ و d_2 : $\begin{cases} x = -7 + 7t' \\ y = -3t' \\ z = 2t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$

نلاحظ أنهما غير مرتبطين خطيا و بالتالي d_1 و d_2 غير متوازيين، فهما إما متقاطعان أو لا ينتميان لنفس المستوي. و عليه نحل الجملة $\begin{cases} -7 + 7t' = -2 + 5t \\ -3t' = -1 - t \\ 2t' = 3 + 4t \end{cases}$ نجد $\begin{cases} t' = 0 \\ t = -1 \end{cases}$ النقطة من d_1 من أجل $t = -1$ هي $(-7, 0, -1)$ والنقطة من d_2

من أجل $t' = 0$ هي $(-7, 0, 0)$ إذن المستقيمان d_1 و d_2 ليسا من نفس المستوي.

(16) كيف تعين تقاطع كرة مع مستقيم؟

طريقة: لتعين تقاطع كرة مع مستقيم معرف بتمثيله الوسيط نعوض x, y, z في المعادلة الديكارتية للكرة، نحصل معادلة من الدرجة الثانية، إذا كانت تقبل حلا مضاعفا فالمستقيم مماس للكرة وإذا كانت تقبل حلين فالمستقيم يقطعها في نقطتين وإذا كانت لا تقبل حلا فالتقاطع خال

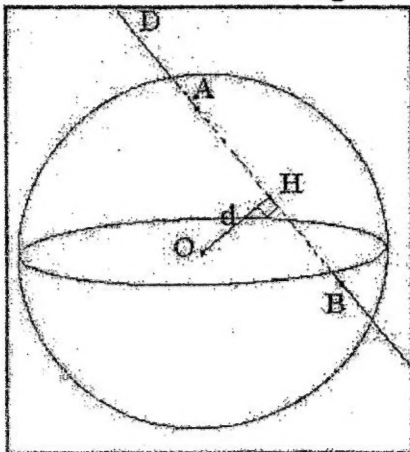
مثال (s): كرة معادلته $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 = 0$ و (d) مستقيم تمثيله

الوسيطي $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}$ بتعويض x, y, z في المعادلة الديكارتية للكرة نجد $6t^2 + 2t = 0$

ومنه $t = 0$ ، $t = -\frac{1}{3}$. من أجل $t = 0$ نجد $x = 1, y = 1, z = -3$

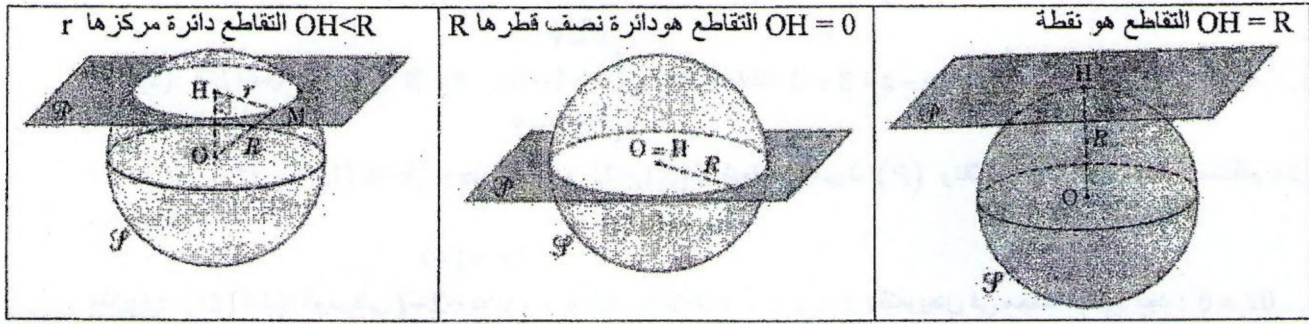
ومن أجل $t = -\frac{1}{3}$ نجد $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{10}{3}$

ومنه (d) يقطع (s) في نقطتين $A(1, 1, -3)$ و $B(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{10}{3})$



بمعادلات المستويين

(16) كيف تعين تقاطع كرة مع مستوي ؟



طريقة : لدراسة تقاطع مستوي وكرة نعين المسقط العمودي H لمركز الكرة O على المستوي ثم نحسب المسافة OH ، إن تقاطع كرة ومستوي إما خال (إذا كانت المسافة أكبر من نصف قطر الكرة) وإما نقطة (إذا كان المستوي مماس للكرة) وإما دائرة (إذا كانت المسافة أقل من أو تساوي نصف قطر الكرة)

مثال: نعتبر الكرة (S) التي مركزها $\omega(2, -1, 1)$ ونصف قطرها $R = 3$ ، ونعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x - 2y + z + 1 = 0$

إن المسافة بين النقطة ω والمستوي (P) هي : $d = \omega H = \frac{|2 + 2 + 1 + 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \sqrt{6}$ وبما أن $\sqrt{6} < R = 3$ فإن (P) و (S) يتقاطعان وفق

دائرة (c) مركزها النقطة H المسقط العمودي لـ ω على (P) ونصف قطرها r ، وبتطبيق نظرية فيثاغورس في المثلث $\omega H M$ القائم في H نجد :

$R^2 = r^2 + d^2$ ومنه $r = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{3}$ و H هو نقطة تقاطع المستقيم (D) المار من ω والعمودي على (P) ، ولدنا $\vec{n}(1, -2, 1)$ هو

شعاع ناظمي لـ (P) ومنه شعاع توجيه لـ (D) وبالتالي التمثيل الوسيط لـ (D) هو : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ وبحل الجملة وتعويض x, y, z في معادلة

(P) نجد $t = -1$ ومنه $x = 1$ و $y = 1$ و $z = 0$ إذن تقاطع (P) و (S) هي الدائرة (c) ذات المركز $H(1, 1, 0)$ ونصف القطر $\sqrt{3}$

(17) كيف تعين تقاطع ثلاث مستويات ؟

طريقة : تعيين تقاطع ثلاث مستويات يعود الى حل جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل . التقاطع قد يكون :
خاليا أو نقطة (إذا كانت الجملة تقبل حلا وحيدا) أو مستقيما (إذا كانت الجملة تقبل عددا غير منته من الحلول مكتوبة بدلالة وسيط وحيد) أو مستويا (إذا كانت المستويات متطابقة)

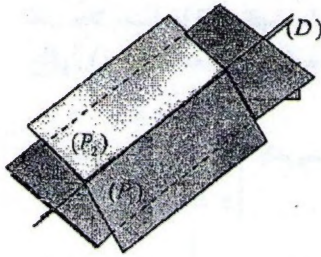
مثال : $(P_1) : 4x + y + z + 10 = 0$ ، $(P_2) : 2x + y + 3 = 0$ ، $(P_3) : 2x - y + 2z - 1 = 0$

أشعة ناظمية لـ (P_1) ، (P_2) ، (P_3) على الترتيب $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ليست مرتبطة خطيا متنى متنى وبالتالي فالمستويات متقاطعة متنى متنى وفق مستقيم

(أ) تقاطع (P_1) ، (P_2) : ليكن (D) مستقيم تقاطعهما $\begin{cases} 4x + y + z + 10 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$

نضع $z = t$ لنحصل على تمثيل وسيطي لـ (D) و هو $\begin{cases} x = t \\ y = -3 - 2t \\ z = -7 - 2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$



(ب) تقاطع (D) و (P_3) : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ (D) ونلاحظ أن $\vec{u} \cdot \vec{n}_3 = 0$ إذن (D) يوازي (P_3) .

$(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \emptyset$ وبالتالي ولكن $(A \notin (P_3))$ و (D) نقطة من (D) $A(0; -3; -7)$